

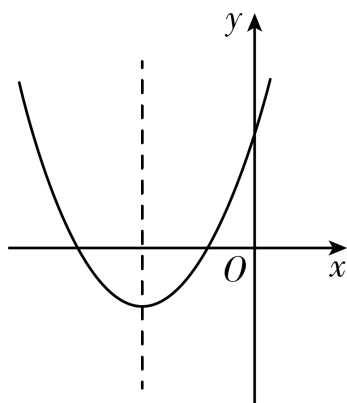
第2讲 二次函数图象专题（一）加油站

一、 a 、 b 、 c 、 Δ 、特殊值

练习1

1. 2017~2018学年天津宝坻区宝坻区第二中学初三月考 ★★★

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图，则一次函数 $y = bx + a$ 的图象不经过第 ____ 象限．



【答案】四

【解析】解：

∵二次函数图象开口向上，

∴ $a > 0$ ，

∴对称轴小于0，

∴ $b > 0$ ，

∴一次函数 $y = bx + a$ 与 y 轴的交点在 x 轴的上方，与 x 轴的交点在 x 轴的负半轴，

∴一次函数 $y = bx + a$ 的图象经过第一、二、三象限，

∴不经过第四象限．

故答案为：四．

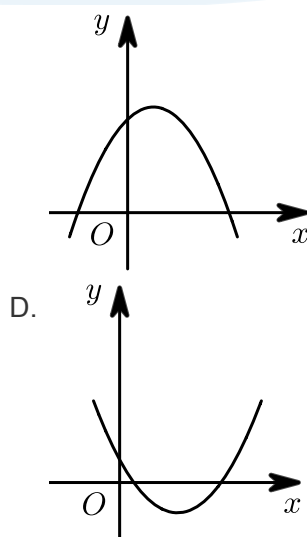
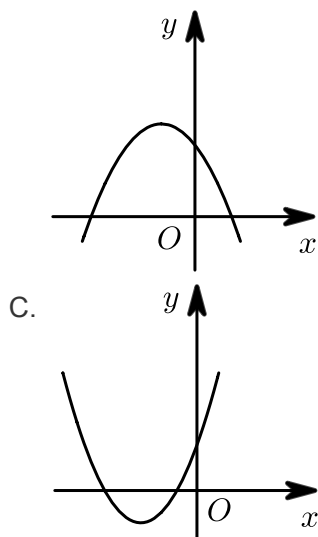
【标注】【知识点】根据二次函数图象判断参数符号

2. 2019~2020学年10月四川自贡沿滩区自贡市沿滩区沿滩中学校初三上学期月考第7题4分 ★★★

正比例函数 $y = kx$ 的图象经过二、四象限，则抛物线 $y = kx^2 - 2x + k^2$ 的大致图象是（ ）．

A.

B.



【答案】 A

【解析】 $\because$ 正比例函数 $y = kx$ 的图象经过二、四象限，

$\therefore k < 0$ ，

$\therefore$ 二次函数图象开口向下，

对称轴 $x = -\frac{-2}{2k} = \frac{1}{k} < 0$ ，在 y 轴左侧，

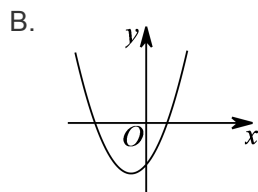
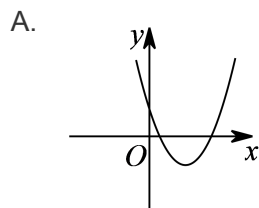
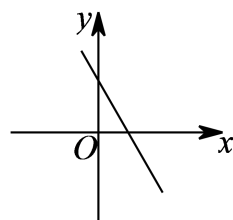
与 y 轴交于正半轴，

$\therefore$ 大致图象为 A 选项．

【标注】 【知识点】一次函数与二次函数图象的综合判断

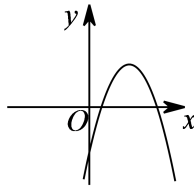
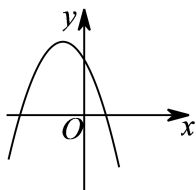
3. 2019~2020 学年河北石家庄赵县初三上学期期中第 7 题 3 分 ★★

已知一次函数 $y = \frac{b}{a}x + c$ 的图象如图，则二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 在平面直角坐标系中的图象可能是 () ．



C.

D.



【答案】A

【解析】由一次函数 $y = \frac{b}{a}x + c$ 的图像可知 $\frac{b}{a} < 0$, $c > 0$.

$$\therefore \frac{b}{a} < 0 ,$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} > 0 ,$$

$\therefore$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像的对称轴在 y 轴右侧 ,

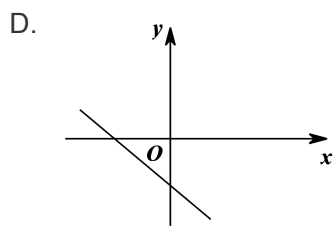
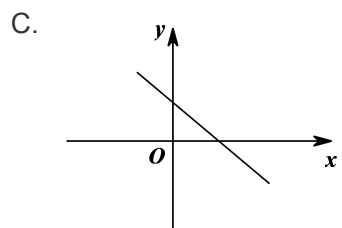
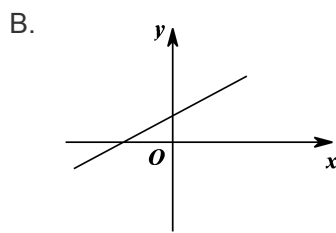
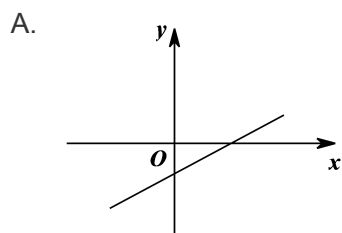
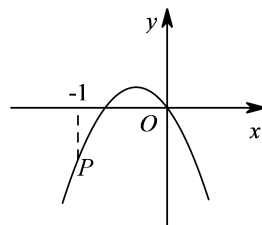
$$\therefore c > 0 ,$$

$\therefore$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像与 y 轴交于正半轴 . 故选 A .

【标注】【知识点】一次函数与二次函数图象的综合判断

4. 2019年山东青岛崂山区青岛市崂山区育才学校初三中考一模第8题3分 ★★

如图 , 二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象开口向下 , 且经过第三象限的点 P . 若点 P 的横坐标为 -1 , 则一次函数 $y = (a - b)x + b$ 的图象大致是 () .



【答案】D

【解析】由二次函数的图象可知 ,

$$a < 0, b < 0,$$

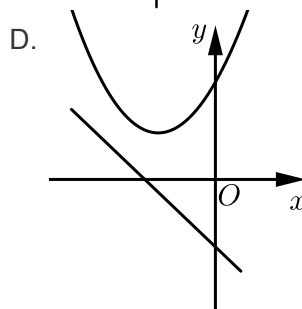
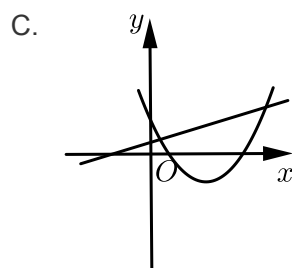
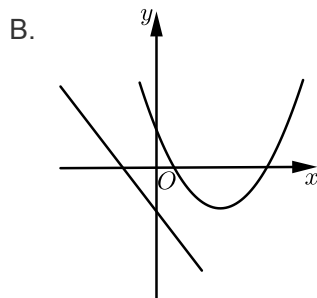
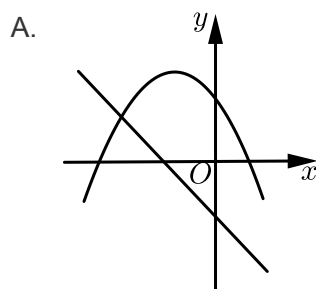
$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } y = a - b < 0,$$

$\therefore y = (a - b)x + b$ 的图象在第二、三、四象限.

【标注】【题型】图象与系数的关系

5. 2018~2019学年3月江苏苏州姑苏区草桥实验学校初三下学期月考第6题3分 ★★

在同一直角坐标系中, 函数 $y = mx + m$ 和函数 $y = -mx^2 + 2x + 2$ (m 是常数, 且 $m \neq 0$) 的图象可能是 ().



【答案】 D

【解析】 方法一: 由函数 $y = mx + m$ 的图象可知 $m < 0$, 即函数 $y = -mx^2 + 2x + 2$ 开口方向朝上, 与图象不符, 故 A 错误;

由函数 $y = mx + m$ 的图象可知 $m < 0$, 对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2m} = \frac{1}{m} < 0$, 则对称轴应在 y 轴左侧, 与图象不符, 故 B 错误;

由函数 $y = mx + m$ 的图象可知 $m > 0$, 即函数 $y = -mx^2 + 2x + 2$ 开口方向朝下, 与图象不符, 故 C 错误;

由函数 $y = mx + m$ 的图象可知 $m < 0$, 即函数 $y = -mx^2 + 2x + 2$ 开口方向朝上, 对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2m} = \frac{1}{m} < 0$, 则对称轴应在 y 轴左侧, 与图象相符, 故 D 正确.

方法二: $y = mx + m$ 过定点 $(-1, 0)$, $y = -mx^2 + 2x + 2$ 过定点 $(0, 2)$,

当 $m > 0$ 时,

$y = mx + m$ 过一、二、三象限,

$y = -mx^2 + 2x + 2$ 开口向下, 故 C 错误;

当 $m < 0$ 时,

$y = mx + m$ 过二、三、四象限，

$y = -mx^2 + 2x + 2$ 开口向上，故 A 错误；

整理 $y = -mx^2 + 2x + 2$ 的对称轴为 $x = \frac{1}{m} < 0$ ，故 B 错误；

故选 D。

【标注】【题型】图象与系数的关系

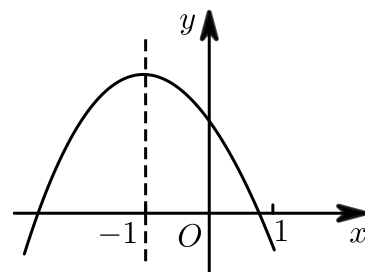
练习2

6. 2018~2019学年9月天津南开区天津市天津中学初三上学期月考第12题3分 ★★★

已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，下列结论中：

- ① $abc > 0$ ；
- ② $b = 2a$ ；
- ③ $a + b + c < 0$ ；
- ④ $a + b - c > 0$ ；
- ⑤ $a - b + c > 0$ ；
- ⑥ $4a + 2b + c > 0$ ；
- ⑦ $4a - 2b + c > 0$ 。

正确的有（ ）。



A. 3个

B. 4个

C. 5个

D. 6个

【答案】C

【解析】由图象知，

$$a < 0, -\frac{b}{2a} = -1,$$

$$\therefore b = 2a,$$

$$\therefore b < 0,$$

$$\therefore c > 0,$$

$$\therefore abc > 0,$$

故①②正确；

当 $x = 1$ 时，由图象可知，

$$y = a + b + c < 0,$$

故③正确；

$$\because a < 0, b < 0, c > 0,$$

$$\therefore a + b - c < 0,$$

故④错误；

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } y = a - b + c,$$

$$\text{由图象可知, } y = a - b + c > 0,$$

故⑤正确；

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时, } y = 4a + 2b + c,$$

$$\text{由图象可知, } y = 4a + 2b + c < 0,$$

故⑥错误；

$$\because \text{当 } x = -2 \text{ 和 } x = 0 \text{ 时, 函数值相等,}$$

$$\therefore y = 4a - 2b + c = c > 0,$$

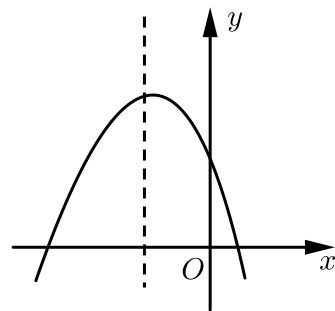
故⑦正确；

故选 C.

【标注】【知识点】关于a、b、c代数式的取值问题

7. 2018~2019学年12月陕西西安雁塔区西安高新逸翠园中学初三上学期月考第8题 ★★

已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，则在① $a < 0$ ，② $b > 0$ ，③ $c < 0$ ，④ $b^2 - 4ac > 0$ 中，正确的判断是（ ）.



A. ①②③④

B. ④

C. ①②③

D. ①④

【答案】D

【解析】由图象可得， $a < 0$ ， $b < 0$ ， $c > 0$ ，

$\therefore$ 该抛物线和 x 轴有两个交点，

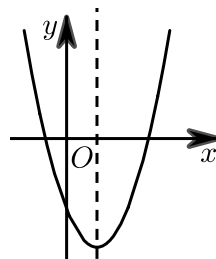
$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0,$$

$\therefore$ ①④正确.

【标注】【知识点】根据二次函数图象判断参数符号

8. 2020~2021学年10月天津河东区天津市第一零二中学初三上学期月考第12题3分 ★★

已知函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，则下列结论正确的是（ ）.



- A. $a > 0, c > 0$ B. $a < 0, c < 0$ C. $a < 0, c > 0$ D. $a > 0, c < 0$

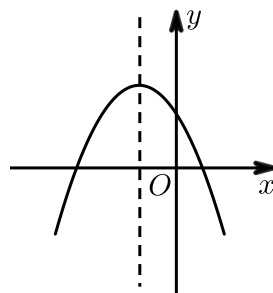
【答案】 D

【解析】 由抛物线的开口向上可知 $a > 0$ ，
与 y 轴的交点为在 y 轴的负半轴上，
 $\therefore c < 0$.

【标注】 【题型】 图象与系数的关系

9. 2018~2019学年12月天津南开区天津市南开翔宇学校初三上学期月考第5题3分 ★★

抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如下图所示，那么（ ）.



- A. $a < 0, b < 0, c > 0$ B. $a < 0, b > 0, c > 0$
C. $a < 0, b > 0, c < 0$ D. $a < 0, b < 0, c < 0$

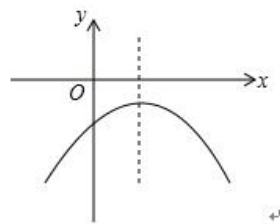
【答案】 A

【解析】 $\because$ 开口向下，
 $\therefore a < 0$ ，
又 $\because$ 对称轴 $-\frac{b}{2a} < 0$ ，
 $\therefore b < 0$ ，
 $\because$ 与 y 轴交于正半轴，
 $\therefore c > 0$.

【标注】 【知识点】 根据二次函数图象判断参数符号

10. 2015~2016学年12月天津和平区天津市第一中学初三上学期月考第4题3分 ★

抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，则（ ）。



A. $a < 0, \Delta < 0, b > 0$

B. $a < 0, \Delta > 0, b > 0$

C. $a < 0, \Delta < 0, b < 0$

D. $a < 0, \Delta > 0, b < 0$

【答案】 A

【解析】 ∵ 该抛物线的图象的开口向下，

∴ $a < 0$.

∵ 该抛物线图象的对称轴 $x = -\frac{b}{2a} > 0$,

∴ $b > 0$.

根据图示知，该图象与 x 轴没有交点，

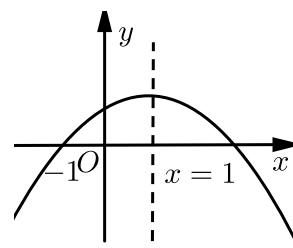
∴ $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

故选 A .

【标注】 【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

11. 2020~2021学年10月天津南开区天津市南开中学初三上学期月考第7题3分 ★★

已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图所示，则下列结论中正确的是（ ）。



A. $a > 0$

B. $x = 3$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根

C. $a + b + c = 0$

D. 当 $x < 1$ 时， y 随 x 的增大而减小

【答案】 B

【解析】 A 选项：∵ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象开口向下，

∴ $a < 0$,

∴ 故 A 错误；

B 选项：

$\therefore$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象经过点 $(3, 0)$,

$\therefore 3$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根,

$\therefore$ 故 B 正确;

C 选项: $\because x = 1$ 时, $y > 0$, $\therefore a + b + c > 0$, $\therefore$ 故 C 错误;

D 选项: $\because$ 当 $x < 1$ 时, y 随 x 的增大而增大, $\therefore$ 故 D 错误.

故选 B.

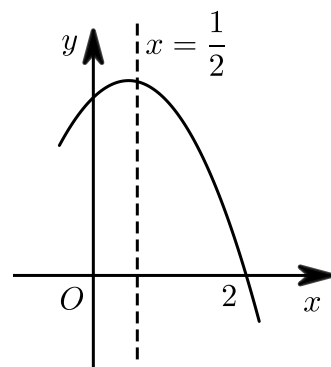
【标注】【知识点】关于 a 、 b 、 c 代数式的取值问题

二、对称轴、最值、平方差

练习3

12. 2015~2016学年北京东城区北京五中分校初三上学期期中第8题3分 ★★

如图是二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 图象的一部分, 对称轴为直线 $x = \frac{1}{2}$, 且经过点 $(2, 0)$, 有下列说法: ① $abc < 0$; ② $a + b = 0$; ③ $4a + 2b + c < 0$; ④若 $(0, y_1)$, $(1, y_2)$ 是抛物线上的两点, 则 $y_1 = y_2$. 上述说法正确的是 ().



A. ①③④

B. ③④

C. ①②④

D. ①②

【答案】 C

【解析】 ① $\because$ 二次函数的图象开口向下,

$\therefore a < 0$,

$\because$ 二次函数的图象交 y 轴的正半轴于一点,

$\therefore c > 0$,

$\because$ 对称轴是直线 $x = \frac{1}{2}$,

$\therefore -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore b = -a > 0,$$

$$\therefore abc < 0.$$

故①正确；

$$\textcircled{2} \because \text{由} \textcircled{1} \text{中知 } b = -a,$$

$$\therefore a + b = 0,$$

故②正确；

$$\textcircled{3} \text{把 } x = 2 \text{ 代入 } y = ax^2 + bx + c \text{ 得： } y = 4a + 2b + c,$$

$\therefore$ 抛物线经过点 $(2, 0)$ ，

$$\therefore \text{当 } x = 2 \text{ 时， } y = 0, \text{ 即 } 4a + 2b + c = 0.$$

故③错误；

$$\textcircled{4} \because (0, y_1), (1, y_2) \text{ 关于抛物线的对称轴直线 } x = \frac{1}{2} \text{ 对称，}$$

$$\therefore y_1 = y_2.$$

故④正确。

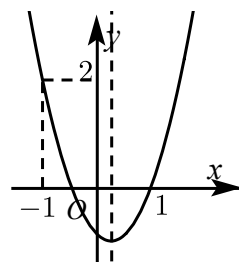
故正确的为①②④。

【标注】【知识点】根据二次函数图象判断参数符号

13. 2014年浙江宁波初三中考一模第9题4分 ★★★

如图所示，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象开口向上，图象经过点 $(-1, 2)$ 和 $(1, 0)$ ，且与 y 轴交于负半轴，

给出四个结论：① $abc < 0$ ；② $a + c = 1$ ；③ $2a + b > 0$ ；④ $b^2 - 4ac > 0$ 。其中结论正确的个数为（ ）。



A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】 B

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象开口向上，

$$\therefore a > 0,$$

$\therefore$ 对称轴在 y 轴右侧，抛物线与 y 轴交点在负半轴，

$$\therefore 0 < -\frac{b}{2a} < 1,$$

$\therefore c < 0, b < 0, 2a + b > 0$ ，选项③正确，

$\therefore abc > 0$ ，选项①错误；

将 $(-1, 2)$ 和 $(1, 0)$ 代入二次函数解析式得： $\begin{cases} a - b + c = 2 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$ ，

两方程相加得： $a + c = 1$ ，选项②正确；

$\therefore$ 抛物线与 x 轴有两个交点，

$\therefore b^2 - 4ac > 0$ ，选项④正确，

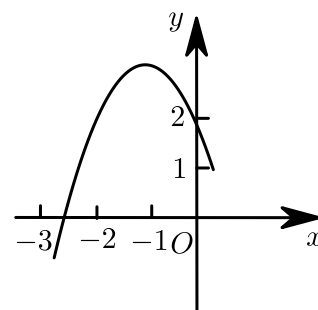
则结论正确的个数为 3，

故选：B。

【标注】【知识点】根据二次函数图象判断参数符号

14. 2017~2018学年辽宁鞍山初三上学期期末第8题3分 ★★★

如图所示，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点为 $(-1, 3)$ ，以下结论：① $b^2 - 4ac < 0$ ；② $4a - 2b + c < 0$ ；③ $2c - b = 3$ ；④ $a + 3 = c$ ，其中正确的个数（ ）。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 A

【解析】 抛物线与 x 轴有两个交点，

$\therefore \Delta > 0$ ，

$\therefore b^2 - 4ac > 0$ ，故①错误；

$\therefore x = -2$ 时， $y > 0$ ，

$\therefore x = -2$ 时， $y = 4a - 2b + c > 0$ ，故②错误；

$\therefore$ 对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} = -1$ ，

$\therefore 2a - b = 0$ ，

$\therefore$ 顶点为 $(-1, 3)$ ，

$\therefore y = a - b + c = 3$ ，

$\therefore y = -\frac{1}{2}b + c = 3$ ，故③错误；

$\therefore$ 顶点为 $(-1, 3)$ ，

$\therefore y = a - b + c = 3$ ，

$\therefore y = a - 2a + c = 3$ ，

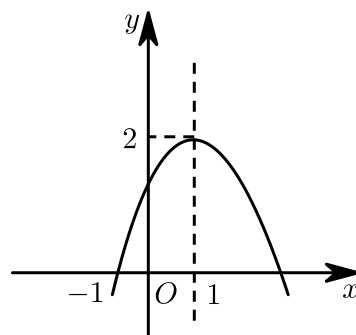
即 $c - a = 3$ ， $a + 3 = c$ ，故④正确；，

故选 A .

【标注】【知识点】根据二次函数图象判断参数符号

15. 2017年浙江宁波鄞州区初三中考一模第10题4分 ★★★

如图，已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象过点 $(-1, 0)$ ，顶点为 $(1, 2)$ ，则下列结论：① $abc > 0$ ；② $x = 1$ 时，函数的最大值是 2；③ $4a + 2b + c > 0$ ；④ $2a + b = 0$ ；⑤ $2c < 3b$. 其中正确的结论有 () .



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 C

【解析】 ∵ 抛物线开口向下，

$$\therefore a < 0 ,$$

$$\therefore \text{对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a} = 1 ,$$

$$\therefore b = -2a > 0 ,$$

∵ 抛物线与 y 轴的交点在正半轴，

$$\therefore c > 0 ,$$

∴ $abc < 0$ ，故①错误；

∵ 顶点坐标为 $(1, 2)$ ，

∴ $x = 1$ 时，函数的最大值是 2，故②正确；

根据对称性，抛物线与 x 轴的另一交点为 $(3, 0)$ ，

$$\therefore x = 2 \text{ 时}, y > 0 ,$$

$$\therefore 4a + 2b + c > 0 , \text{ 故③正确；}$$

$$\therefore b = -2a ,$$

$$\therefore 2a + b = 0 , \text{ 故④正确；}$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时}, y = a - b + c = 0 ,$$

$$\therefore -\frac{b}{2} - b + c = 0 ,$$

$$\therefore 2c = 3b , \text{ 故⑤错误 .}$$

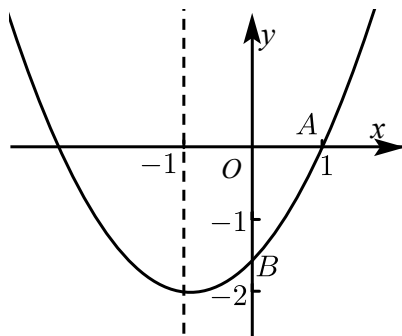
综上所述，正确的结论有②③④，共 3 个 .

故选 C .

【标注】【知识点】关于a、b、c代数式的取值问题

16. 2017~2018学年天津宁河县初三上学期期中第12题3分 ★★★

如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ ，对称轴为直线 $x = -1$ ，下列结论：① $abc > 0$ ；② $b^2 - 4ac > 0$ ；③ $a - b + c < 0$ ；④函数图像经过点 $(-3, 0)$ ；⑤ $8a + c > 0$. 其中，正确结论的个数是 () .



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】C

【解析】① ∵ 抛物线开口向上，对称轴为直线 $x = 1$ ，与 y 轴的交点 B 在 $(0, -2)$ 和 $(0, -1)$ 之间（不包括这两点），

$$\therefore a > 0, -\frac{b}{2a} = 1, c < 0,$$

$$\therefore b = -2a < 0,$$

$\therefore abc > 0$ ，结论①错误；

∵ 抛物线与 x 轴有两个交点，

$$\therefore b^2 - 4ac > 0, \text{ 结论②正确；}$$

∵ 当 $x = -1$ 时， $y = a - b + c$ 此时最小，为负数，故结论③正确；

∵ 抛物线与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ ，对称轴为直线 $x = -1$ ，根据抛物线的对称性，抛物线与 x 轴的另一个交点为 $(-3, 0)$ ，故选项④正确；

∵ 当 $x = 2$ 时， $y > 0$ ，

$$\therefore 4a + 2b + c < 0,$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 1, \text{ 即 } b = 2a,$$

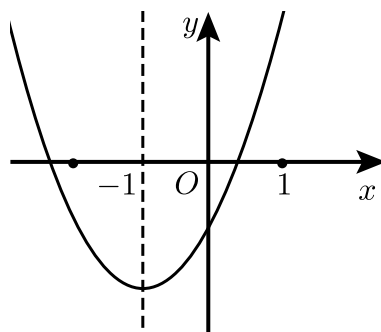
$$\therefore 4a + 4a + c > 0, \text{ 即 } 8a + c > 0, \text{ 所以⑤正确，}$$

故选 C .

【标注】【知识点】关于a、b、c代数式的取值问题

17. 2016年天津河东区初三毕业考试第12题3分 ★★★

已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的对称轴为直线 $x = -1$ ，该抛物线与 x 轴的一个交点为 $(x_1, 0)$ ，且 $0 < x_1 < 1$ ，有下列结论：① $abc > 0$ ；② $9a - 3b + c > 0$ ；③ $b < a$ ；④ $3a + c > 0$ 。其中正确结论的个数是 ()。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 $\because y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的对称轴为直线 $x = -1$ ，

与 x 轴的一个交点为 $(x_1, 0)$ ，

且 $0 < x_1 < 1$ ，

$\therefore x = -3$ 时， $y = 9a - 3b + c > 0$ ；

$\because$ 对称轴是 $x = -1$ ，则 $-\frac{b}{2a} = -1$ ，

$\therefore b = 2a$ 。

$\because a > 0$ ，

$\therefore b > a > 0$ ；

再取 $x = 1$ 时， $y = a + b + c = a + 2a + c = 3a + c > 0$ 。

$x = 0$ 时， $y = c < 0$ ， $\therefore abc < 0$ 。

$\therefore$ ②、④正确。

【标注】【知识点】根据二次函数图象判断参数符号

18. 2021年天津滨海新区初三中考一模第12题3分 ★★★

抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) 的对称轴是直线 $x = 1$ ，与 x 轴的一个交点为 $A(x_1, 0)$ ，

$-2 < x_1 < -1$ ，下列结论：① $bc > 0$ ；② $8a + c < 0$ ；③ $5a + b + 2c > 0$ ，其中正确结论的个数是 ()。

A. 0个

B. 1个

C. 2个

D. 3个

【答案】 D

【解析】 $\because a < 0$ 是对称轴 $x = 1$ ，其一交点 $A(x_1, 0)$ ，且 $-2 < x_1 < -1$ ，

则设另一交点为 $B(x_2, 0)$ ，

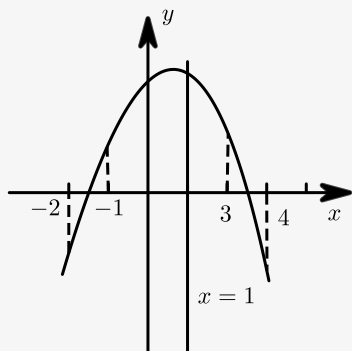
则 $\frac{x_1 + x_2}{2} = 1$, $x_2 = 2 - x_1$,

$\therefore -2 < x_1 < -1$,

$\therefore 1 < -x_1 < 2$,

$\therefore 3 < 2 - x_1 < 4$ 即 $3 < x_2 < 4$,

如图画出草图： $\because -\frac{b}{2a} = 1$, $a < 0$,



$\therefore b > 0$,

如图 $c > 0$,

$\therefore bc > 0$, ①正确,

$\because b = -2a$, 当 $x = -2$ 时 $y < 0$, 当 $x = 4$ 时, $y < 0$,

$\therefore 16a + 4b + c < 0$,

$\therefore 16a + 4 \times (-2a) + c < 0$,

$\therefore 8a + c < 0$, $\therefore$ ②正确;

又 $\because$ 当 $x = -1$ 时, $a - b + c > 0$, ①

当 $x = 2$ 时, $4a + 2b + c > 0$, ②,

$\therefore$ ① + ② 得 $5a + b + 2c > 0$, $\therefore$ ③正确;

故选 D. 三个正确.

【标注】【知识点】关于a、b、c代数式的取值问题

19. 2020~2021学年10月天津和平区天津市第五十五中学初三上学期月考第12题3分 ★★

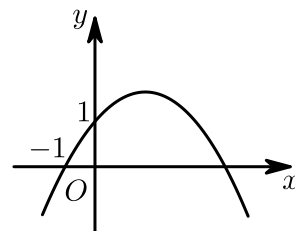
如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象的顶点在第一象限, 且过点 $(0, 1)$ 和 $(-1, 0)$. 下列结论正确的是 ().

① $ab < 0$,

② $b^2 > 4a$,

③ $0 < a + b + c < 2$,

④ $0 < b < 1$.



A. 5个

B. 4个

C. 3个

D. 2个

【答案】 B

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 过点 $(0, 1)$ 和 $(-1, 0)$,

$$\therefore c = 1, a - b + c = 0,$$

① $\because$ 抛物线的对称轴在 y 轴右侧,

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} > 0,$$

$\therefore a$ 与 b 异号,

$\therefore ab < 0$, 正确;

② $\because$ 抛物线与 x 轴有两个不同的交点,

$$\therefore b^2 - 4ac > 0,$$

$$\because c = 1,$$

$$\therefore b^2 - 4a > 0, b^2 > 4a, \text{ 正确};$$

④ $\because$ 抛物线开口向下,

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore ab < 0,$$

$$\therefore b > 0,$$

$$\because a - b + c = 0, c = 1,$$

$$\therefore a = b - 1,$$

$$\because a < 0,$$

$$\therefore b - 1 < 0, b < 1,$$

$$\therefore 0 < b < 1, \text{ 正确};$$

$$\textcircled{3} \because a - b + c = 0,$$

$$\therefore a + c = b,$$

$$\therefore a + b + c = 2b > 0,$$

$$\because b < 1, c = 1, a < 0,$$

$$\therefore a + b + c = a + b + 1 < a + 1 + 1 = a + 2 < 0 + 2 = 2,$$

$$\therefore 0 < a + b + c < 2, \text{ 正确},$$

故选 B.

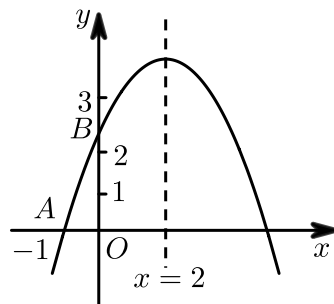
【标注】【知识点】关于 a 、 b 、 c 代数式的取值问题

20. 2020~2021学年12月浙江杭州下城区杭州启正中学初三上学期月考第10题3分 ★★★

如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ ，与 y 轴的交点 B 在 $(0, 2)$ 与 $(0, 3)$ 之间（不包括这两点），对称轴为直线 $x = 2$ 。

下列结论：① $abc < 0$ ；② $9a + 3b + c > 0$ ；③若点 $M(\frac{1}{2}, y_1)$ ，点 $N(\frac{5}{2}, y_2)$ 是函数图象上的两点，则 $y_1 < y_2$ ；④ $-\frac{3}{5} < a < -\frac{2}{5}$ 。

其中正确结论有（ ）。



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 D

【解析】 ①由开口可知： $a < 0$ ，

$$\therefore \text{对称轴 } x = -\frac{b}{2a} > 0,$$

$$\therefore b > 0,$$

由抛物线与 y 轴的交点可知： $c > 0$ ，

$$\therefore abc < 0, \text{ 故①正确；}$$

②：抛物线与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ ，

对称轴为 $x = 2$ ，

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另外一个交点为 $(5, 0)$ ，

$$\therefore x = 3 \text{ 时}, y > 0,$$

$$\therefore 9a + 3b + c > 0, \text{ 故②正确；}$$

$$\text{③由于 } \frac{1}{2} < 2 < \frac{5}{2},$$

且 $(\frac{5}{2}, y_2)$ 关于直线 $x = 2$ 的对称点的坐标为 $(\frac{3}{2}, y_2)$ ，

$$\therefore \frac{1}{2} < \frac{3}{2},$$

$$\therefore y_1 < y_2, \text{ 故③正确，}$$

$$\text{④} \therefore -\frac{b}{2a} = 2,$$

$$\therefore b = -4a,$$

$$\therefore x = -1, y = 0,$$

$$\therefore a - b + c = 0,$$

$$\therefore c = -5a,$$

$$\therefore 2 < c < 3,$$

$$\therefore 2 < -5a < 3,$$

$$\therefore -\frac{3}{5} < a < -\frac{2}{5}, \text{ 故④正确.}$$

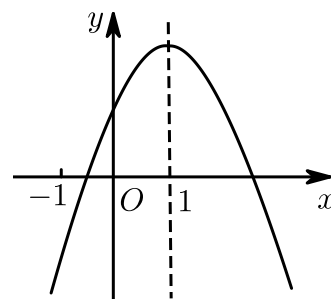
故选：D.

【标注】【题型】对称轴相关问题

练习4

21. 2018~2019学年广东深圳福田区深圳实验学校初中部初三上学期期末第10题3分 ★★★

如图，已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图所示，有下列 5 个结论：① $abc > 0$ ；② $b - a > c$ ；③ $4a + 2b + c > 0$ ；④ $3a > -c$ ；⑤ $a + b > m(am + b)$ (实数 $m \neq 1$)。其中正确的结论有 ()。



A. ①②③

B. ②③⑤

C. ②③④

D. ③④⑤

【答案】B

【解析】①：对称轴在 y 轴的右侧，

$$\therefore ab < 0,$$

由图象可知： $c > 0$ ，

$$\therefore abc < 0,$$

故①不正确；

$$\text{②当 } x = -1 \text{ 时, } y = a - b + c < 0,$$

$$\therefore b - a > c,$$

故②正确；

$$\text{③由对称知, 当 } x = 2 \text{ 时, 函数值大于 } 0, \text{ 即 } y = 4a + 2b + c > 0,$$

故③正确；

$$\text{④} \because x = -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore b = -2a,$$

$$\therefore a - b + c < 0,$$

$$\therefore a + 2a + c < 0,$$

$$3a < -c,$$

故④不正确；

⑤当 $x = 1$ 时， y 的值最大．此时， $y = a + b + c$ ，

而当 $x = m$ 时， $y = am^2 + bm + c$ ，

所以 $a + b + c > am^2 + bm + c (m \neq 1)$ ，

故 $a + b > am^2 + bm$ ，即 $a + b > m(am + b)$ ，

故⑤正确．

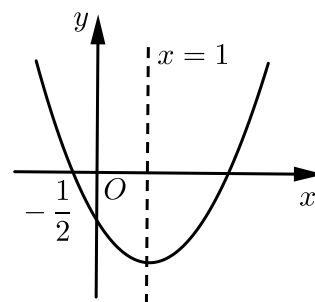
故②③⑤正确．

故选 B．

【标注】【知识点】根据二次函数图象判断参数符号

22. 2020~2021学年天津南开区初三上学期期中第12题3分 ★★★

如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象经过点 $(-\frac{1}{2}, 0)$ ，对称轴为直线 $x = 1$ ，下列 5 个结论：① $abc < 0$ ；② $a - 2b + 4c = 0$ ；③ $2a + b > 0$ ；④ $2c - 3b < 0$ ；⑤ $a + b \leq m(am + b)$ ．其中正确的结论有（ ）．



A. 4个

B. 3个

C. 2个

D. 1个

【答案】 C

【解析】 ①函数的对称轴在 y 轴右侧，

则 $ab < 0$ ，而 $c < 0$ ，故 $abc > 0$ ，故①错误，不符合题意；

②将点 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 代入函数表达式得： $a - 2b + 4c = 0$ ，故②正确，符合题意；

③函数的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$ ，

即 $b = -2a$ ，故 $2a + b = 0$ ，故③错误，不符合题意；

④由②③得： $a - 2b + 4c = 0$ ， $b = -2a$ ，

则 $c = -\frac{5a}{4}$ ，故 $2c - 3b = \frac{7a}{2} > 0$ ，故④错误，不符合题意；

⑤当 $x = 1$ 时，函数取得最小值，

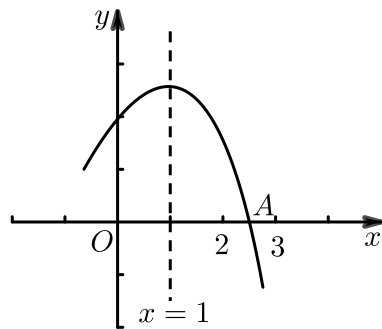
即 $a + b + c \leq m(am + b) + c$ ，故⑤正确，符合题意．

故选 C．

【标注】【知识点】关于a、b、c代数式的取值问题

23. 2018~2019学年10月湖北武汉武昌区初三上学期月考C组联盟第10题3分 ★★★

如图是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 图象的一部分, 与 x 轴的交点 A 在点 $(2, 0)$ 和 $(3, 0)$ 之间, 对称轴是直线 $x = 1$. 对于下列说法: ① $ab < 0$; ② $2a + b = 0$; ③ $3a + c > 0$; ④ $a + b \geq m(am + b)$ (m 为实数); ⑤ 当 $-1 < x < 3$ 时, $y > 0$, 其中正确的是 ().



A. ①②④

B. ①②⑤

C. ②③④

D. ③④⑤

【答案】A

【解析】① ∵ 对称轴在 y 轴右侧,

∴ a, b 异号,

∴ $ab < 0$, 故正确;

② ∵ 对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$,

∴ $2a + b = 0$, 故正确;

③ ∵ $2a + b = 0$,

∴ $b = -2a$,

∴ 当 $x = -1$ 时, $y = a - b + c < 0$,

∴ $a - (-2a) + c = 3a + c < 0$, 故错误;

④ 根据图示知, 当 $x = 1$ 时, 函数有最大值;

当 $m \neq 1$ 时, 有 $am^2 + bm + c < a + b + c$,

∴ $a + b \geq m(am + b)$ (m 为实数).

故正确.

⑤ 根据图示知, 当 $-1 < x < 3$ 时, y 不一定大于 0.

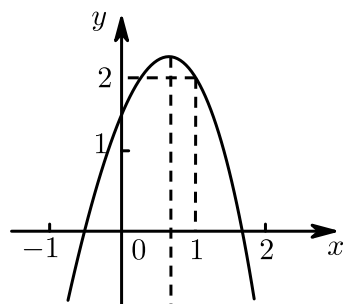
故错误.

故选: A.

【标注】【知识点】根据二次函数图象判断参数符号

24. 2013年天津南开区初三中考一模第10题3分 ★★

如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象经过点 $(1, 2)$ 且与 x 轴交点的横坐标分别为 x_1, x_2 ，其中 $-1 < x_1 < 0, 1 < x_2 < 2$ ，下列结论：① $4a + 2b + c < 0$ ，② $2a + b < 0$ ，③ $b^2 + 8a > 4ac$ ，④ $a < -1$ ，其中结论正确的有（ ）。



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】D

【解析】由抛物线的开口向下知 $a < 0$ ，

与 y 轴的交点为在 y 轴的正半轴上，得 $c > 0$ ，

对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} < 1$ ，

$\therefore a < 0$ ，

$\therefore 2a + b < 0$ ，

而抛物线与 x 轴有两个交点，

$\therefore b^2 - 4ac > 0$ ，

当 $x = 2$ 时， $y = 4a + 2b + c < 0$ ，

当 $x = 1$ 时， $a + b + c = 2$ 。

$\therefore \frac{4ac - b^2}{4a} > 2$ ，

$\therefore 4ac - b^2 < 8a$ ，

$\therefore b^2 + 8a > 4ac$ ，

$\therefore$ ① $a + b + c = 2$ ，则 $2a + 2b + 2c = 4$ ，

② $4a + 2b + c < 0$ ，

③ $a - b + c < 0$ 。

由①，③得到 $2a + 2c < 2$ ，

由①，②得到 $2a - c < -4$ ， $4a - 2c < -8$ ，

上面两个相加得到 $6a < -6$ ，

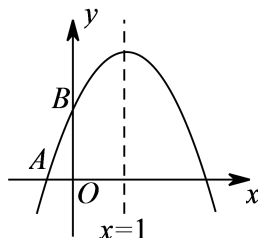
$\therefore a < -1$ 。

故选：D。

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

25. 2021年广东佛山南海区佛山市南海外国语学校初三中考一模第10题3分 ★★★

如图，已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a < 0)$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ ，对称轴为直线 $x = 1$ ，与 y 轴的交点 B 在 $(0, 2)$ 和 $(0, 3)$ 之间（包括这两点），下列结论：①当 $x > 3$ 时， $y < 0$ ；② $3a + b < 0$ ；③ $-1 \leq a \leq -\frac{2}{3}$ ；④ $4ac - b^2 > 8a$ 。其中正确的结论是（ ）。



A. ①③④

B. ①②③

C. ①②④

D. ①②③④

【答案】 B

【解析】 $\because$ 二次函数的图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ ，对称轴为直线 $x = 1$ ，

$\therefore$ 与 x 轴另一个交点的坐标为 $(3, 0)$ ，

$\therefore$ ①中，当 $x > 3$ 时， $y < 0$ ，正确。

$\because$ 对称轴为直线 $x = 1$ ，

$\therefore -\frac{b}{2a} = 1$ ， $b = -2a$ ， $2a + b = 0$ ，

$\because a < 0$ ，

$\therefore$ ②中 $3a + b < 0$ 正确。

$\because$ 图象过点 $(-1, 0)$ ，

$\therefore a - b + c = 0$ ，又 $b = -2a$ ， $\therefore c = -3a$ 。

$\because B$ 在 $(0, 2)$ 和 $(0, 3)$ 之间（包括这两点），

$\therefore 2 \leq c \leq 3$ 。

$\therefore -1 \leq a \leq -\frac{2}{3}$ ，③正确。

$\because$ 顶点在 B 的上方，

$\therefore \frac{4ac - b^2}{4a} > 2$ ，即 $4ac - b^2 > 8a$ ，

$\therefore$ ④错误。

【标注】 【知识点】 关于 a 、 b 、 c 代数式的取值问题

26. 2021年天津河北区初三中考零模第12题3分 ★★★

在平面直角坐标系中，二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图所示，与 x 轴的交点分别为 $(-3, 0)$ 、 $(1, 0)$ ，且函数与 y 轴交点在 $(0, -1)$ 的下方，结合图象给出下列结论：

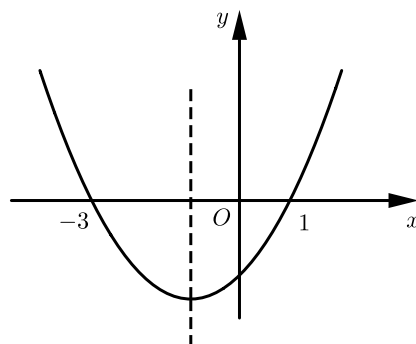
① $abc < 0$ ；

② $b^2 - 4ac < 4a$ ；

③当 $-2 \leq x \leq 3$ 时, y 的取值范围是 $-\frac{3}{2}b \leq y \leq 6b$;

④ $5a - b + 2c < -1$,

其中, 正确的结论是 () .



A. ①②

B. ①③

C. ①④

D. ③④

【答案】 C

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与轴的交点分别 $(-3, 0)$, $(1, 0)$,

且函数与 y 轴交点在 $(0, -1)$ 的下方,

$\therefore$ 开口向上, 对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-3+1}{2} = -1$, $c < 0$,

$\therefore a > 0$, $b = 2a > 0$,

$\therefore abc < 0$, 故①正确;

$\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $x = -1$, 函数与 y 轴交点在 $(0, -1)$ 的下方,

$\therefore \frac{4ac - b^2}{4a} < -1$,

$\therefore b^2 - 4ac > 4a$, 故②错误;

$\because$ 二次函数的图象开口向上, 对称轴为直线 $x = -1$,

$\therefore$ 抛物线的最小值为 $y = a - b + c$, $b = 2a$,

$\therefore$ 最小值为 $y = -\frac{1}{2}b + c$,

当 $-2 \leq x \leq 3$ 时, $x = 3$ 时取最大值为 $y = 9a + 3b + c$,

即 $y = \frac{9}{2}b + 3b + c = \frac{15}{2}b + c$,

$\therefore$ 当 $-2 \leq x \leq 3$ 时, y 的取值范围是 $-\frac{1}{2}b + c \leq y \leq \frac{15}{2}b + c$,

故③错误;

$\because$ 二次函数的图象开口向上, 对称轴为直线 $x = -1$,

函数与 y 轴交点在 $(0, -1)$ 的下方,

$\therefore$ 当 $x = -2$ 时, $y < -1$, 即 $4a - 2b + c < -1$,

$\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与轴的交点分别 $(-3, 0)$, $(1, 0)$,

$\therefore a + b + c = 0$,

$\therefore 5a - b + 2c < -1$, 故④正确.

故选：C.

【标注】【知识点】关于a、b、c代数式的取值问题

27. 2018年山东济南商河县初三中考二模第12题4分 ★★★

函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, 且 $a \neq 0$) 经过点 $(-1, 0)$ 、 $(m, 0)$, 且 $1 < m < 2$, 当 $x < -1$ 时, y 随 x 增大而减小, 下列结论: ① $abc > 0$; ② $a + b < 0$; ③ 若点 $A(-3, y_1)$, $B(3, y_2)$ 在抛物线上, 则 $y_1 < y_2$; ④ $a(m-1) + b = 0$; ⑤ $c \leq -1$ 时, 则 $b^2 - 4ac \leq 4a$. 其中结论正确的有 () 个.

A. 5

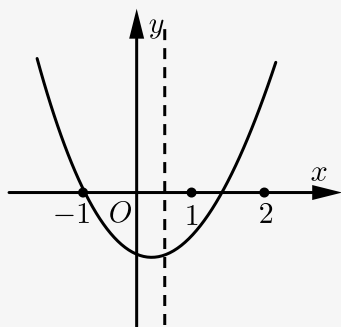
B. 4

C. 3

D. 2

【答案】D

【解析】如图,



∵ 抛物线开口向上,

∴ $a > 0$,

∵ 抛物线的对称轴在 y 轴的右侧,

∴ $b < 0$,

∵ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴下方,

∴ $c < 0$,

∴ $abc > 0$,

所以①的结论正确;

∵ 抛物线过点 $(-1, 0)$ 和 $(m, 0)$, 且 $1 < m < 2$,

∴ $0 < -\frac{b}{2a} < \frac{1}{2}$,

∴ $\frac{1}{2} + \frac{b}{2a} = \frac{a+b}{2a} > 0$,

∴ $a + b > 0$,

所以②的结论错误;

∵ 点 $A(-3, y_1)$ 到对称轴的距离比点 $B(3, y_2)$ 到对称轴的距离远,

∴ $y_1 > y_2$,

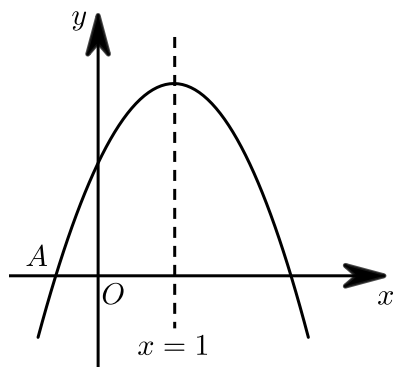
所以③的结论错误;

$\because$ 抛物线过点 $(-1, 0)$, $(m, 0)$,
 $\therefore a - b + c = 0$, $am^2 + bm + c = 0$,
 $\therefore am^2 - a + bm + b = 0$,
 $a(m+1)(m-1) + b(m+1) = 0$,
 $\therefore a(m-1) + b = 0$,
 所以④的结论正确;
 $\therefore \frac{4ac - b^2}{4a} < c$,
 而 $c \leq -1$,
 $\therefore \frac{4ac - b^2}{4a} < -1$,
 $\therefore b^2 - 4ac > 4a$, 所以⑤的结论错误.
 故选 D.

【标注】【题型】图象与系数的关系

28. 2015~2016学年天津南开区初三上学期期末第12题3分 ★★★

如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, 顶点坐标为 $(1, n)$, 与 y 轴的交点在 $(0, 2)$, $(0, 3)$ 之间 (包括端点), 则下列结论: ①当 $x > 3$ 时, $y < 0$; ② $3a + b > 0$; ③ $-1 \leq a \leq -\frac{2}{3}$; ④ $3 \leq n \leq 4$, 正确的是 ().



- A. ①② B. ①③ C. ①④ D. ③④

【答案】 B

【解析】 ① $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, 对称轴是直线 $x = 1$,
 $\therefore$ 该抛物线与 x 轴的另一个交点的坐标是 $(3, 0)$,
 $\therefore$ 根据图像可知, 当 $x > 3$ 时, $y < 0$,
 故①正确,
 ② 根据图像知, 抛物线开口方向向下, 则 $a < 0$,
 $\because$ 对称轴 $x = -\frac{b}{2a} = 1$,
 $\therefore b = -2a$,

$\therefore 3a + b = 3a - 2a = a < 0$, 即 $3a + b < 0$,

故②错误 ,

③ $\because$ 抛物线与 x 轴的两个交点坐标分别是 $(-1, 0)$, $(3, 0)$,

$\therefore -1 \times 3 = -3$, $\frac{c}{a} = -3$, 则 $a = -\frac{c}{3}$,

$\because$ 抛物线与 y 轴的交点在 $(0, 2)$, $(0, 3)$ 之间 (包含端点) ,

$\therefore 2 \leq c \leq 3$,

$\therefore -1 \leq -\frac{c}{3} \leq -\frac{2}{3}$, 即 $-1 \leq a \leq -\frac{2}{3}$,

故③正确 ,

④ 根据题意知 , $a = -\frac{c}{3}$, $-\frac{b}{2a} = 1$,

$\therefore b = -2a = \frac{2}{3}c$,

$\therefore n = a + b + c = \frac{4}{3}c$,

$\because 2 \leq c \leq 3$,

$\therefore \frac{8}{3} \leq \frac{4}{3}c \leq 4$, $\frac{8}{3} \leq n \leq 4$,

故④错误 ,

综上所述 , 正确的有①③ ,

故答案为 B .

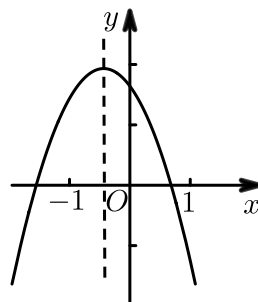
【标注】【知识点】关于 a 、 b 、 c 代数式的取值问题

练习6

29. 2018年贵州安顺中考真题第10题3分 ★★

已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图 , 分析下列四个结论 :

① $abc < 0$. ② $b^2 - 4ac > 0$. ③ $3a + c > 0$. ④ $(a + c)^2 < b^2$. 其中正确的结论有 () .



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 B

【解析】 ① 由抛物线开口向下 , 可得 $a < 0$, 又由抛物线与 y 轴交于正半轴 , 可得 $c > 0$, 然后由对称轴在 y 轴左侧 , 得到 b 与 a 同号 , 则可得 $b < 0$, $\therefore abc > 0$, 故①错误 .

② 由抛物线与 x 轴有两个交点 , 可得 $b^2 - 4ac > 0$, 故②正确 .

③当 $x = -2$ 时, $y < 0$, 即 $4a - 2b + c < 0$ (1)

当 $x = 1$ 时, $y < 0$, 即 $a + b + c < 0$ (2)

(1) + (2) $\times 2$ 得: $6a + 3c < 0$, 即 $2a + c < 0$

又 $\because a < 0$,

$\therefore a + (2a + c) = 3a + c < 0$.

故③错误.

④ $\because$ 当 $x = 1$ 时, $y = a + b + c < 0$, 当 $x = -1$ 时, $y = a - b + c > 0$,

$\therefore (a + b + c)(a - b + c) < 0$,

即 $[(a + c) + b][(a + c) - b] = (a + c)^2 - b^2 < 0$,

$\therefore (a + c)^2 < b^2$,

故④正确.

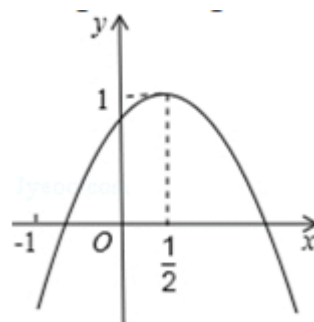
综上所述, 正确的结论有 2 个.

【标注】【知识点】根据二次函数图象判断参数符号

30. 2015年山东济南槐荫区初三中考二模第14题3分 ★★

如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 y 轴正半轴相交, 其顶点坐标为 $(0.5, 1)$, 下列结论:

① $ac < 0$; ② $a + b = 0$; ③ $4ac - b^2 = 4a$; ④ $(a + c)^2 - b^2 < 0$. 其中正确的个数是 ().



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 D

【解析】 解: ① $\because$ 抛物线图象开口向下, 且与 y 轴交点在 y 轴正半轴,

$\therefore a < 0, c > 0$.

$\therefore ac < 0$, 正确;

② $\because$ 抛物线顶点坐标为 $(0.5, 1)$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$,

$\therefore a = -b$, 即 $a + b = 0$, 正确;

③ $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$,

$\therefore$ 有 $\frac{4ac - b^2}{4a} = 1$, 即 $4ac - b^2 = 4a$, 正确;

④当 $x = 1$ 时, $y = a + b + c > 0$,

当 $x = -1$ 时, $y = a - b + c < 0$,

则 $(a - b + c)(a + b + c) < 0$, 即 $(a + c)^2 - b^2 < 0$, 正确.

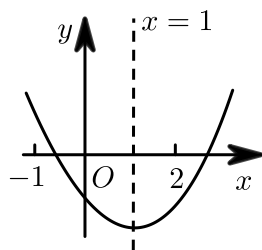
正确的有 4 个.

故选 D.

【标注】【题型】图象与系数的关系

31. 2019~2020 学年天津武清区初三上学期期中雍阳中学、广贤路初级中学联考第 12 题 3 分 ★★

二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图所示, 下列结论: ① $ac > 0$; ② 当 $x \geq 1$ 时, y 随 x 的增大而减小; ③ $3b - 2c < 0$; ④ $b^2 < (a + c)^2$; ⑤ $4a - 2b + c > 0$, 其中正确的个数是 ().



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 由图可知,

抛物线开口向上, 则 $a > 0$,

$x = 0$ 时, $y < 0$, 则 $c < 0$,

则 $ac < 0$, 故①错误;

对称轴为 $x = 1$, 则 $x \geq 1$ 时, y 随 x 增大而增大, 故②错误;

当 $x = -2$ 时, $y = 4a - 2b + c > 0$, 故⑤正确;

当 $x = -1$ 时, $y = a - b + c > 0$,

对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} = 1$, $b = -2a$,

即 $a = -\frac{b}{2}$,

$\therefore -\frac{b}{2} - b + c > 0$, $-\frac{3b}{2} + c > 0$,

$\therefore 3b - 2c < 0$, 故③正确;

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, $y_3 = a + b + c < 0$,

$\therefore y_2 \cdot y_3 = (a + b + c)(a - b + c) < 0$,

$\therefore (a + c)^2 - b^2 < 0$,

即 $b^2 < (a + c)^2$, 故④错误;

综上所述, ③⑤正确;

故选 B .

【标注】【知识点】关于a、b、c代数式的取值问题

三、 x 轴交点距离、线段关系

练习7

32. 2018年天津河西区初三中考二模第12题3分 ★★

已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A 和点 B ，顶点为 P ，若 $\triangle ABP$ 恰为等腰直角三角形，则 $b^2 - 4ac$ 的值为 () .

A. 1

B. 4

C. 8

D. 12

【答案】 B

【解析】 如图为例，当 $\triangle ABP$ 为等腰 $\text{Rt}\triangle$ ，作

$$PC \perp x \text{轴于 } C, PC = \frac{1}{2}AB,$$

$$AB = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}, PC = \left| \frac{4ac - b^2}{4a} \right|,$$

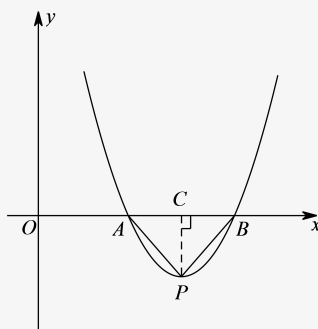
$$AB = 2PC, \text{ 即 } \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \left| \frac{-\Delta}{4a} \right|,$$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\Delta|}{|a|},$$

$$\sqrt{\Delta} = \frac{1}{2}|\Delta|, \Delta = \frac{1}{4}\Delta^2, \Delta > 0,$$

$$\Delta = 4,$$

$$\text{即 } b^2 - 4ac = 4.$$



【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

33. 2018~2019学年浙江杭州西湖区杭州市第十三中学初三上学期期中第7题3分 ★★

已知抛物线 $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}x + 6$ 与 x 轴交于点 A ，点 B ，与 y 轴交于点 C ，若 D 为 AB 的中点，则 CD 的长为 () .

A. $\frac{15}{4}$

B. $\frac{9}{2}$

C. $\frac{13}{2}$

D. $\frac{15}{2}$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 抛物线 $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}x + 6$ 与 x 轴交于点 A ，点 B ，点 D 为 AB 的中点，

$\therefore$ 点 D 为抛物线的对称轴与 x 轴的交点，

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为 } x = -\frac{\frac{3}{2}}{2 \times (-\frac{1}{6})} = \frac{9}{2},$$

$$\therefore D(\frac{9}{2}, 0).$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 得 } y = 6,$$

$$\therefore C(0, 6).$$

$$\therefore CD \text{ 的长为 } \sqrt{(\frac{9}{2})^2 + 6^2} = \frac{15}{2}.$$

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

34. 2016年天津河西区初三中考二模第12题3分 ★★★

已知抛物线 $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}x + 6$ 与直线 $y = x$ 交于点 A , 点 B , 则 AB 的长为 ().

A. $3\sqrt{34}$

B. $6\sqrt{17}$

C. $3\sqrt{17}$

D. $2\sqrt{34}$

【答案】A

【解析】由 $\begin{cases} y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}x + 6 \\ y = x \end{cases}$, 将第二式代入第一式, 得到 $x^2 - 3x - 36 = 0$

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = 3$, $x_1 \cdot x_2 = -36$,

$$\therefore AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

$$\therefore AB = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2},$$

$$\therefore AB = \sqrt{2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]},$$

$$\therefore AB = \sqrt{2(3^2 + 4 \times 36)},$$

$$\therefore AB = 3\sqrt{34}.$$

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

35. 2019~2020学年2月陕西西安灞桥区西安铁一中东城滨河中学初三下学期周测C卷第10题3分

★★★

将抛物线 $y = -2x^2 - 1$ 向上平移若干个单位, 使抛物线与坐标轴有三个交点, 如果这些交点能够成等边三角形, 那么平移的距离为 ().

A. 1个单位

B. $\sqrt{3}$ 个单位

C. $\frac{5}{2}$ 个单位

D. $\frac{3}{2}$ 个单位

【答案】C

【解析】设抛物线 $y = -2x^2 - 1$ 向上平移若干个单位, 抛物线与 x 轴有 2 个交点,

$$\text{则抛物线解析式为 } y = -2x^2 + b - 1,$$

$$\text{因为 } \Delta = 0 - 4 \times (-2) \times (b - 1) > 0,$$

所以 $b > 1$,

当 $y = 0$ 时, $-2x^2 + b - 1 = 0$,

解得 $x_1 = \sqrt{\frac{b-1}{2}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{b-1}{2}}$,

则抛物线与 x 轴的两交点间的距离为 $2\sqrt{\frac{b-1}{2}}$,

因为抛物线与坐标轴有三个交点, 如果这些交点能够成等边三角形,

所以 $b - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{b-1}{2}}$,

整理得 $2b^2 - 7b + 5 = 0$,

解得 $b_1 = 1$ (舍去), $b_2 = \frac{5}{2}$,

所以平移的距离为 $\frac{5}{2}$.

【标注】【知识点】二次函数平移变换

【知识点】等边三角形的性质

36. 2017年河北邯郸初三中考二模第16题2分 ★★★

在平面直角坐标系中, 已知 $A(2, 4)$ 、 $B(2, -1)$, 若抛物线 $y = 2(x - 3)^2 + k$ 与线段 AB 有交点, 且与 y 轴相交于点 C , 则下列四种说法: ①当 $k = 0$ 时, 抛物线 $y = 2(x - 3)^2 + k$ 与 x 轴有唯一公共点; ②当 $x > 4$ 时, y 随 x 的增大而增大; ③点 C 的纵坐标的最大值为 2; ④抛物线与 x 轴的两交点间的距离的最大值为 $\sqrt{6}$; 其中正确的是 ().

A. ①②③

B. ①②④

C. ①③④

D. ②③④

【答案】B

【解析】①把 $k = 0$ 代入 $y = 2(x - 3)^2 + k$, 得 $y = 2(x - 3)^2$,

方程 $2(x - 3)^2 = 0$ 即为 $2x^2 - 12x + 18 = 0$,

$\therefore \Delta = 12^2 - 4 \times 2 \times 18 = 0$,

$\therefore$ 方程 $2(x - 3)^2 = 0$ 有两个相等的实数根,

$\therefore$ 抛物线 $y = 2(x - 3)^2$ 与 x 轴有唯一公共点,

即当 $k = 0$ 时, 抛物线 $y = 2(x - 3)^2 + k$ 与 x 轴有唯一公共点, 故①正确;

② $\because y = 2(x - 3)^2 + k$ 中,

$a = 2 > 0$, 开口向上, 对称轴是直线 $x = 3$,

$\therefore$ 当 $x > 3$ 时, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x > 4$ 时, y 随 x 的增大而增大, 故②正确;

③ $\because$ 抛物线 $y = 2(x - 3)^2 + k$ 与线段 AB 有交点, 且与 y 轴相交于点 C ,

$\therefore$ 抛物线 $y = 2(x - 3)^2 + k$ 过点 $A(2, 4)$ 时, 点 C 的纵坐标最大,

把 $A(2, 4)$ 代入 $y = 2(x - 3)^2 + k$, 得 $4 = 2(2 - 3)^2 + k$, 解得 $k = 2$,

此时抛物线是 $y = 2(x-3)^2 + 2$, 即 $y = 2x^2 - 12x + 20$,

此时点 C 的坐标为 $(0, 20)$, 即点 C 的纵坐标的最大值为 20 , 故③错误 ;

④ : 抛物线 $y = 2(x-3)^2 + k$ 与线段 AB 有交点 ,

$\therefore$ 抛物线 $y = 2(x-3)^2 + k$ 过点 $B(2, -1)$ 时 , 与 x 轴的两交点间的距离最大 ,

把 $B(2, -1)$ 代入 $y = 2(x-3)^2 + k$, 得 $-1 = 2(2-3)^2 + k$, 解得 $k = -3$,

此时抛物线是 $y = 2(x-3)^2 - 3$,

解方程 $2(x-3)^2 - 3 = 0$, 得 $x_1 = 3 + \frac{\sqrt{6}}{2}$, $x_2 = 3 - \frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以抛物线与 x 轴的两交点间的距离的最大值为 $\left(3 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) - \left(3 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \sqrt{6}$, 故④正

确 .

故选 : B .

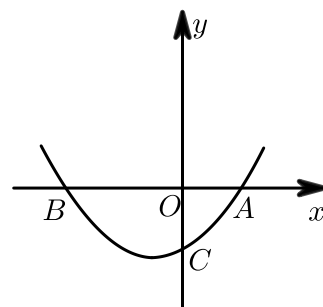
【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次函数与坐标轴交点

练习8

37. ★★

抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图 , 且 $OB = 2OC$, 则下列关系式正确的为 () .



- A. $4ac + 2b + 1 = 0$ B. $4ac - 2b + 1 = 0$ C. $4ac - 2b - 1 = 0$ D. $4ac + 2b - 1 = 0$

【答案】A

【解析】选项都是方程 , 然后直接点的代入即可 , 但是注意字母的正负 .

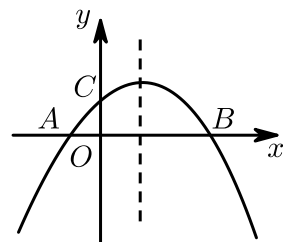
【标注】【知识点】根据二次函数图象判断参数符号

38. 2017年天津和平区初三中考一模第12题3分 ★★★

如图 , 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象与 x 轴交于 A , B 两点 , 与 y 轴交于点 C , 且

$OA = OC$, 则下列结论① $abc < 0$; ② $b^2 - 4ac > 0$; ③ $ac - b + 1 = 0$; ④ $OA \cdot OB = \frac{c}{a}$.

其中正确结论的个数是 () .



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 C

【解析】 $\because$ 抛物线开口向下，

$$\therefore a < 0,$$

$\because$ 抛物线的对称轴在 y 轴的右侧，

$$\therefore b > 0,$$

$\because$ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方，

$$\therefore c > 0,$$

$$\therefore abc < 0, \text{ 所以①正确；}$$

$\because$ 抛物线与 x 轴有 2 个交点，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0, \text{ 所以②正确；}$$

$$\because OA = OC, C(0, c),$$

$$\therefore A(-c, 0),$$

$$\therefore ac^2 - bc + c = 0,$$

$$\therefore ac - b + 1 = 0, \text{ 所以③正确；}$$

设 A 、 B 两点的横坐标为 x_1 、 x_2 ，则 $OA = -x_1$ ， $OB = x_2$ ，

$$\because x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a},$$

$$\therefore OA \cdot OB = -\frac{c}{a}, \text{ 所以④错误.}$$

故选 C.

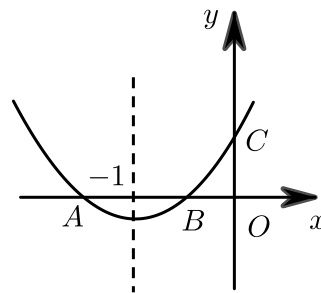
【标注】 【知识点】一元二次方程根的判别式

【能力】推理论证能力

39. 2019~2020学年9月浙江杭州西湖区杭州绿城育华学校初三上学期周测A卷第9题3分 ★★★

已知：如图所示，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = -1$ ，与 x 轴交于 A 、 B 两点，交 y 轴于点 C ，且 $OB = OC$ ，则下列结论正确的个数是（ ）.

$$\text{① } b = 2a; \text{② } a - b + c > -1; \text{③ } 0 < b^2 - 4ac < 4; \text{④ } ac + 1 = b.$$



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 D

【解析】 ① ∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = -1$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -1,$$

整理得 $b = 2a$,

故①正确;

由抛物线与 y 轴交于点 C , 就可知道 C 点的坐标为 $(0, c)$, 又因 $OC = OB$, 所以 $B(-c, 0)$, 把它代入 $y = ax^2 + bx + c$, 即 $ac^2 - bc + c = 0$, 两边同时除以 c , 即得到

$$ac - b + 1 = 0, \text{ 所以 } ac + 1 = b.$$

$$\text{② } \because b = 2a, \quad ac + 1 = b,$$

$$\therefore a = \frac{1}{2-c},$$

$$\because 0 < c < 1,$$

$$\therefore \frac{1}{2} < a < 1,$$

$$\therefore 1 < b < 2,$$

$$\therefore a - b + c > -1$$

$$\therefore \text{当 } x = -1 \text{ 时, } y = ax^2 + bx + c = a - b + c > -1,$$

故②正确.

③ ∵ 函数图象与 x 轴有两个交点,

$$\therefore \text{得到 } b^2 - 4ac > 0,$$

$$\because 0 < b^2 < 4, \quad 4ac > 0,$$

$$\therefore b^2 - 4ac < 4$$

故③正确;

④ 由抛物线与 y 轴交于点 C , 就可知道 C 点的坐标为 $(0, c)$, 又因 $OC = OB$, 所以

$B(-c, 0)$, 把它代入 $y = ax^2 + bx + c$, 即 $ac^2 - bc + c = 0$, 两边同时除以 c , 即得到

$$ac - b + 1 = 0, \text{ 所以 } ac + 1 = b.$$

$$\because b = 2a, \quad ac + 1 = b,$$

$$\therefore a = \frac{1}{2-c},$$

$$\because 0 < c < 1,$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{2} < a < 1, \\ \therefore -1 < -a < -\frac{1}{2}, \\ \therefore a - b + c > -a + c \\ \therefore -1 < -a + c < \frac{1}{2},\end{aligned}$$

故④正确.

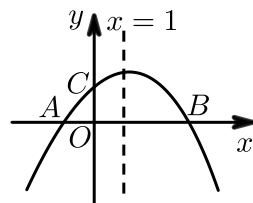
故选D.

【标注】【知识点】关于a、b、c代数式的取值问题

40. 2019~2020学年10月天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初三上学期月考第10题4分 ★★★

如图所示，已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点，与 y 轴交于点 C ，

$OA = OC$ ，对称轴为直线 $x = 1$ ，则下列结论：① $abc < 0$ ；② $a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c > 0$ ；③ $ac + b + 1 = 0$ ；④ $2 + c$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根．其中正确的有（ ）．



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 C

【解析】 ∵ 抛物线开口向下，

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore b = -2a > 0,$$

∵ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方，

$$\therefore c > 0,$$

$$\therefore abc < 0, \text{ 所以①正确；}$$

$$\therefore b = -2a,$$

$$\therefore a + \frac{1}{2}b = a - a = 0,$$

$$\therefore c > 0,$$

$$\therefore a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c > 0, \text{ 所以②正确；}$$

$$\therefore C(0, c), OA = OC,$$

$$\therefore A(-c, 0),$$

把 $A(-c, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 得 $ac^2 - bc + c = 0,$

$$\therefore ac - b + 1 = 0, \text{ 所以③错误；}$$

$\therefore A(-c, 0)$, 对称轴为直线 $x = 1$,
 $\therefore B(2 + c, 0)$,
 $\therefore 2 + c$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根,
 所以④正确;
 故选: C.

【标注】【思想】函数思想

【思想】数形结合思想

【思想】方程思想

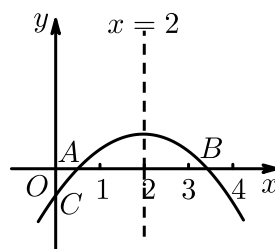
【能力】抽象概括能力

【能力】运算能力

【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

41. 2019~2020学年11月天津和平区天津市益中学校初三上学期月考第12题3分 ★★★

如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象与 x 轴正半轴相交于 A, B 两点, 与 y 轴相交于点 C , 对称轴为直线 $x = 2$, 且 $OA = OC$, 则下列结论: ① $abc > 0$. ② $9a + 3b + c > 0$. ③ $c > -1$.
 ④关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 有一个根为 $-\frac{1}{a}$. ⑤抛物线上有两点 $P(x_1, y_1)$ 和 $Q(x_2, y_2)$, 若 $x_1 < 2 < x_2$, 且 $x_1 + x_2 > 4$, 则 $y_1 > y_2$. 其中正确的结论有 ().



A. 2个

B. 3个

C. 4个

D. 5个

【答案】D

【解析】由抛物线的开口可知: $a < 0$,

由抛物线与 y 轴的交点可知: $c < 0$,

由抛物线的对称轴可知: $-\frac{b}{2a} > 0$,

$\therefore b > 0$,

$\therefore abc > 0$, 故①正确.

令 $x = 3$, $y > 0$,

$\therefore 9a + 3b + c > 0$, 故②正确.

$\therefore OA = OC < 1$,

$\therefore c > -1$, 故③正确.

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = 2$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 2 ,$$

$$\therefore b = -4a ,$$

$$\because OA = OC = -c ,$$

$$\therefore \text{当 } x = -c \text{ 时 } , y = 0 ,$$

$$\therefore ac^2 - bc + c = 0 ,$$

$$\therefore ac - b + 1 = 0 ,$$

$$\therefore ac + 4a + 1 = 0 ,$$

$$\therefore c = -\frac{4a+1}{a} ,$$

$$\therefore \text{设关于 } x \text{ 的方程 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ (} a \neq 0 \text{) 有一个根为 } x ,$$

$$\therefore x - c = 4 ,$$

$$\therefore x = c + 4 = -\frac{1}{a} , \text{ 故④正确 .}$$

$$\because x_1 < 2 < x_2 ,$$

$$\therefore P , Q \text{ 两点分布在对称轴的两侧 ,}$$

$$\because 2 - x_1 - (x_2 - 2)$$

$$= 2 - x_1 - x_2 + 2$$

$$= 4 - (x_1 + x_2) < 0 ,$$

$$\text{即 } x_1 \text{ 到对称轴的距离小于 } x_2 \text{ 到对称轴的距离 ,}$$

$$\therefore y_1 > y_2 , \text{ 故⑤正确 .}$$

【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次函数与一元二次方程的关系